

Karhunen-Loeve 展开基函数的小波分解算法*

曲延云^{1,2} 郑南宁¹ 李翠华²

1. 西安交通大学人工智能与机器人研究所, 西安 710049;

2. 厦门大学计算机科学系计算机应用技术研究所, 厦门 361005

摘要 Karhunen-Loeve 展开被广泛应用于信号处理, 图像分析中的特征提取, 动力系统模型简化等. 文中提出了用小波方法快速估计 Karhunen-Loeve 展开式中基函数. 通过把核函数投影到小波空间把积分问题离散化. 应用正交小波变换, 积分问题就被转化为矩阵特征分解问题. 若核函数还是局部 p 阶光滑的, 所得矩阵的维数可进一步降低, 而精度却没有大的损失. 实验结果表明所提出的算法是快速有效的.

关键词 Karhunen-Loeve 展开 小波变换 特征值 特征函数 核函数

Karhunen-Loeve 展开 (KLE) 被广泛应用于信号处理, 图像分析以及动力系统中, 它被用来提取特征, 简化模型. 其基函数在均方误差最小意义下是最优的. Karhunen-Loeve 展开式的正交基 $\{\Phi_n(t)\}$ 可以通过求解下列积分方程得到^[1],

$$\int_D \Gamma(t, \tau) \Phi_n(\tau) d\tau = \lambda_n \Phi_n(t), \quad \forall t \in D, \quad (1)$$

其中 $\Gamma(t, \tau)$ 是核函数, $\Phi_n(t)$ 是要求的特征函数, D 表示积分区间. 利用上式可以求已知连续信号集的正交基, 而由这些基表示的信号的系数是互不相关的.

但是连续型的 KLE 通常会遇到求解上的困难. 文献[1—3]从不同的角度解决该问题. 文献[1, 2]利用离散余弦变换 (DCT) 估计 KLE 的基函数, 但求解中不可避免地遇到大规模矩阵求特征值特征向量问题. 文献[3]在 snapshot 方法基础上, 结合小波变换能快速估计 KLE 的基函数.

本文先对核函数进行小波变换, 使积分方程离散化, 把积分问题转化为矩阵特征分解问题, 而且

在核函数满足光滑性要求的情况下, 所得矩阵的维数可进一步降低, 而解的精度没有大的损失.

1 小波变换

由多分辨分析^[4]理论知, 母小波通过尺度伸缩, 平移变换构成 Hilbert 空间的完备基, 所以任一能量有限的信号可由小波基表示. 本文选择正交小波基, 使得基函数之间高度不相关, 表示系数亦不相关. 又因为小波变换具有良好的时频局部化性质, 所以小波基比余弦基有更好的性质, 在函数逼近中可以代替余弦基.

令 $\phi(t)$ 表示尺度函数, $\psi(t)$ 为母小波, 则尺度空间可表示为 $V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}\}$, $\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$, 小波空间可表示为 $W_j = \text{span}\{\psi_{j,k}\}$, $\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$.

多分辨逼近具有如下性质:

- (1) $\cdots V_j \subset V_{j+1} \subset V_{j+2} \cdots$;
- (2) $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ 在 $L^2(R)$ 中稠密;
- (3) $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$;

2004-02-18 收稿, 2004-08-30 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 60205001, 60175008)和创新研究群体科学基金(批准号: 60021302)

E-mail: yyqu@jingxian.xmu.edu.cn

- (4) 若 $f(x) \in V_j$, 则 $f(2x) \in V_{j+1}$;
- (5) 若 $f(x) \in V_j$, 则 $f(x-2^{-j}k) \in V_j$;

根据假定, 我们选择正交小波基, 其满足下列正交条件:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}, \phi_{l,m} \rangle &= \delta_{j,l} \delta_{k,m}, & \langle \phi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle &= 0, \\ \langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle &= \delta_{j,l} \delta_{k,m}, & j, k, l, m &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

而双尺度关系为

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_k a_k \phi(2t-k), \\ \psi(t) &= \sum_k b_k \psi(2t-k), \end{aligned}$$

其中 a_k, b_k 为实系数. 进一步假定其和是有限的偶数项的, 则 $b_k = (-1)^k a_{N-1-k}$.

令 $P_j: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j, Q_j: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow W_j$, 即

$$P_j f = \sum_k s_{j,k} \phi_{j,k}, \quad Q_j f = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k},$$

其中 $s_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle, d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$. 变量 $s_{j,k}$ 为 f 的低频分量, $d_{j,k}$ 为 f 的高频分量. 系数分解关系为:

$$\begin{aligned} s_{j,m} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k a_{k-2m} s_{j+1,k}, \\ d_{j,m} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_{k-2m} s_{j+1,m}, \end{aligned}$$

重构关系为

$$s_{j+1,m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k a_{m-2k} s_{j,k} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_{m-2k} d_{j,k},$$

用小波级数进行函数逼近的另一个重要的性质是用紧支撑小波级数表示光滑多项式时, 逼近阶与小波消失矩有关, 若 $\psi_{j,k}$ 有 p 阶消失矩, 且 $f(t)$ 有 p 阶导数, 令 $f_j(t) = P_j f$, 则 $\|f(t) - f_j(t)\| \leq C 2^{-jp} \|f^{(p)}(t)\|$, 其中 $f^{(p)}(t)$ 为 $f(t)$ 的 p 阶导数 (见文献[5]), 小波系数的收敛阶为 $O(2^{-jp})$, 即 $|d_{j,k}| = \left| \int f(t) \psi_{j,k}(t) dt \right| \leq C 2^{-jp} \|f^{(p)}(t)\|$ (见文献[5]). 由于 Daubechies 紧支撑小波具有较高的消失矩, 本文实验中用它来逼近核函数.

2 利用小波变换求 Karhunen-Loeve 展开式的特征函数

假设 $D = [-T, T]$. 首先对核函数 $\Gamma_s(t, \tau)$ 进行单尺度小波分解

$$\Gamma_s(t, \tau) = \sum_{k=0}^{N-1} s_{J,k}(t) \phi_{J,k} + \sum_{k=0}^{N-1} d_{J,k}(t) \psi_{J,k}, \quad (2)$$

这总可以通过基函数的尺度, 平移变换得到. 相应的对 $\Phi_n(\tau)$ 进行小波分解:

$$\Phi_n(\tau) = \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l^n \phi_{J,l} + \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l^n \psi_{J,l}, \quad (3)$$

其中 $s_{J,k} = \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \phi_{J,k}(\tau) d\tau$,

$$d_{J,k} = \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \psi_{J,k}(\tau) d\tau, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

把(2)和(3)式代入(1)式左边, 得

$$\sum_{k=0}^{N-1} s_{J,k}(t) \alpha_k^n + \sum_{k=0}^{N-1} d_{J,k}(t) \beta_k^n = \lambda_n \Phi_n(t), \quad (4)$$

在(4)式两边分别乘以 $\phi_{J,m}(t), \psi_{J,m}(t), m=0, 1, 2, \dots, N-1$, 然后在区间 D 上积分, 得

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^n \Omega_{k,m}^{(1)} + \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k^n \Omega_{k,m}^{(2)} = \lambda_n \alpha_m^n \\ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^n \Omega_{k,m}^{(3)} + \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k^n \Omega_{k,m}^{(4)} = \lambda_n \beta_m^n \end{cases},$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_{k,m}^{(1)} &= \int_{-T}^T s_{J,k}(t) \phi_{J,m}(t) dt = \\ & \int_{-T}^T \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \phi_{J,k}(\tau) \phi_{J,m}(t) dt d\tau, \\ \Omega_{k,m}^{(2)} &= \int_{-T}^T d_{J,k}(t) \phi_{J,m}(t) dt = \\ & \int_{-T}^T \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \psi_{J,k}(\tau) \phi_{J,m}(t) dt d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{k,m}^{(3)} &= \int_{-T}^T s_{J,k}(t) \psi_{J,m}(t) dt = \\ & \int_{-T}^T \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \phi_{J,k}(\tau) \psi_{J,m}(t) dt d\tau, \\ \Omega_{k,m}^{(4)} &= \int_{-T}^T d_{J,k}(t) \psi_{J,m}(t) dt = \\ & \int_{-T}^T \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \psi_{J,k}(\tau) \psi_{J,m}(t) dt d\tau. \end{aligned}$$

记 $A^{(1)} = \{\Omega_{k,m}^{(1)}\}_{k,m=0}^{N-1}$, $A^{(2)} = \{\Omega_{k,m}^{(2)}\}_{k,m=0}^{N-1}$, $A^{(3)} = \{\Omega_{k,m}^{(3)}\}_{k,m=0}^{N-1}$, $A^{(4)} = \{\Omega_{k,m}^{(4)}\}_{k,m=0}^{N-1}$.

构造矩阵 $C = \begin{bmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \\ A^{(3)} & A^{(4)} \end{bmatrix}$. 求解该矩阵的特征对, 其特征值可近似 Karhunen-Loeve 的特征值, 其特征向量通过小波逆变换得到 Karhunen-Loeve 特征函数的近似.

同理, 可考虑对 $\Gamma_s(t, \tau)$ 的多尺度分解

$$\begin{aligned} \Gamma_s(t, \tau) &= \sum_{k=0}^{N-1} s_{J-M,k}(t) \phi_{J-M,k}(\tau) + \\ & \sum_{j=J-M}^{J-1} \sum_{k=0}^{m(j)} d_{j,k}(t) \psi_{j,k}(\tau), \end{aligned}$$

相应的有

$$\begin{aligned} \Phi_n(\tau) &= \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l^n \phi_{J-M,l}(\tau) + \\ & \sum_{j=J-M}^{J-1} \sum_{k=0}^{m(j)} \beta_{j,k}^n \psi_{j,k}(\tau), \end{aligned}$$

其中 $s_{J-M,k}(t) = \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \phi_{J-M,k}(\tau) d\tau,$

$d_{j,k}(t) = \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \psi_{j,k}(\tau) d\tau, \forall k \in \mathbb{Z},$

$m(j) = 2^{j-(J-M)} N - 1.$

类似于本节前部分的推导, 得到如下方程组:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^n \Omega_{k,m}^{(1)} + \sum_{j=J-M}^{J-1} \sum_{k=0}^{m(j)} \beta_{j,k}^n \Omega_{j,k,m}^{(2)} = \lambda_n \alpha_n^n \\ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^n \Omega_{k,l,m}^{(3)} + \sum_{j=J-M}^{J-1} \sum_{k=0}^{m(j)} \beta_{j,k}^n \Omega_{j,k,l,m}^{(4)} = \lambda_n \beta_{l,m}^n \end{cases}, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_{k,m}^{(1)} &= \int_{-T}^T s_{J-M,k}(t) \phi_{J-M,m}(t) dt = \\ & \int_{-T}^T \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \phi_{J-M,k}(\tau) \phi_{J-M,m}(t) dt d\tau, \\ \Omega_{j,k,m}^{(2)} &= \int_{-T}^T d_{j,k}(t) \phi_{J-M,m}(t) dt = \\ & \int_{-T}^T \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \psi_{j,k}(\tau) \phi_{J-M,m}(t) dt d\tau, \\ \Omega_{k,l,m}^{(3)} &= \int_{-T}^T s_{J-M,k}(t) \psi_{l,m}(t) dt = \\ & \int_{-T}^T \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \phi_{J-M,k}(\tau) \psi_{l,m}(t) dt d\tau, \\ \Omega_{j,k,l,m}^{(4)} &= \int_{-T}^T d_{j,k}(t) \psi_{l,m}(t) dt = \\ & \int_{-T}^T \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \psi_{j,k}(\tau) \psi_{l,m}(t) dt d\tau. \end{aligned}$$

记 $A^{(1)} = \{\Omega_{k,m}^{(1)}\}$, $A^{(2)} = \{\Omega_{j,k,m}^{(2)}\}$, $A^{(3)} = \{\Omega_{k,l,m}^{(3)}\}$, $A^{(4)} = \{\Omega_{j,k,l,m}^{(4)}\}$, 其中各矩阵的行可表示如下:

$$\begin{aligned} A_m^{(1)} &= [\Omega_{0,m}, \dots, \Omega_{N-1,m}], \\ A_m^{(2)} &= [\Omega_{J-M,0,m}, \dots, \Omega_{J-M,N-1,m} \mid \Omega_{J-M+1,0,m}, \dots, \\ & \quad \Omega_{J-M+1,2N-1,m} \mid \dots \mid \Omega_{J-1,0,m}, \dots, \\ & \quad \Omega_{J-1,2^{(M-1)}N-1,m}], \\ A_{l,m}^{(3)} &= [\Omega_{0,l,m}, \dots, \Omega_{N-1,l,m}], \\ A_{l,m}^{(4)} &= [\Omega_{J-M,0,l,m}, \dots, \Omega_{J-M,N-1,l,m} \mid \Omega_{J-M+1,0,l,m}, \dots, \\ & \quad \Omega_{J-M+1,2N-1,l,m} \mid \dots \mid \Omega_{J-1,0,l,m}, \dots, \\ & \quad \Omega_{J-1,2^{(M-1)}N-1,l,m}]. \end{aligned}$$

(5) 式用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \\ A^{(3)} & A^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} = \lambda_n \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中, $x^{(1)} = [\alpha_0^n, \alpha_1^n, \dots, \alpha_{N-1}^n]^T$, $x^{(2)} = [\beta_{J-M,0}^n, \dots, \beta_{J-M,N-1}^n \mid \beta_{J-M+1,0}^n, \dots, \beta_{J-M+1,2N-1}^n \mid \dots \mid \beta_{J-1,0}^n, \dots,$

$\beta_{-1,2}^{(M-1)} N_{-1}]^T$. 同样记方程组(6)的系数矩阵为 C , 其特征向量便是(1)式的特征函数的小波系数. 但当系数矩阵的维数过大时, 其特征值和特征向量的求解仍然是一个很复杂的问题, 为了简化计算, 我们选择适当的小波基, 使系数矩阵成为稀疏矩阵. 计算多尺度逼近时, 忽略高频系数块 $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$, 这是因为:

(1) 对局部二元 p 阶光滑函数, 对角块系数以 $O(2^{-(j+l)p})$ 衰减 ($j, l = J-1, \dots, J-M$).

(2) 小波系数在不连续点衰减速度慢, 除此之外迅速衰减.

在第3部分的数值实验中我们将验证, 对 p 阶光滑的核函数, 忽略 $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ 部分在小波分解层数不高的情况下, 不会造成精度上太大的损失.

3 数值实验

本节验证第二部分提出的方法. 计算文献[1]中提供的例子,

$$\int_{-T}^T e^{-k|t-\tau|} \Phi_n(\tau) d\tau = \lambda_n \Phi_n(t), \quad \forall t \in [-T, T].$$

表1 核函数在 $k=1$ 时, 7种情况的特征值能量分布比较

序号	snapshot	single-level ^{a)}	two-level ^{a)}	two-level	three-level	four-level	five-level
1	0.93473	0.93220	0.92868	0.92870	0.92182	0.91207	0.91389
2	0.31998	0.32531	0.33271	0.33271	0.34770	0.37121	0.37446
3	0.12893	0.13220	0.13660	0.13660	0.14404	0.1496	0.13972
4	0.065397	0.067262	0.069583	0.069578	0.072524	0.072223	0.062801
5	0.038771	0.039916	0.041200	0.041190	0.042263	0.040483	0.033345

a) 用没有简化的矩阵计算的值

表2 核函数在 $k=2$ 时, 7种情况的特征值能量分布比较

序号	snapshot	single-level ^{a)}	two-level ^{a)}	two-level	three-level	four-level	five-level
1	0.82708	0.82191	0.81447	0.81454	0.80029	0.79081	0.84806
2	0.46412	0.46825	0.47449	0.47452	0.48936	0.50858	0.44973
3	0.24912	0.25412	0.26131	0.26132	0.27402	0.27678	0.23758
4	0.14436	0.14813	0.15313	0.15313	0.15935	0.15510	0.12857
5	0.091364	0.094015	0.097170	0.097154	0.099589	0.093649	0.074625

a) 用没有简化的矩阵计算的值

在第二个实验中, 我们比较了多尺度小波变换方法, 与省略方法得到的特征值. 两层小波分解得到的矩阵是 133×133 维的, 只取低频部分的矩阵是 34×34 维的, 采用省略矩阵, 将大大减少计算量. 两种方法的特征值之差见图2. 由图2看出, 差的最大值出现在第34, 35个上, 其值不超过

0.06 . 前34个特征值的差是由两种方法的特征值之差引起的, 其值小于0.05, 第35个至133个特征值差主要是多尺度小波变换的特征值, 由此看出, 从第35个特征值之后的特征值已经很小, 能量主要分布在前34个特征值上. 图2也进一步验证了附录中误差界的结论.

$T=1, k=1$ 时的核函数见图1. 首先我们比较了 snapshot 方法和在不同层数的 Daubechies2 小波分解下特征值的能量分布. 分别计算核函数在 $k=1, k=2$, 时的特征值. 我们对核函数离散化, t, τ 分别等距离离散成128个点. 考虑7种情况下的特征值能量比较, 即 snapshot 方法, 单层小波分解, 2层小波分解以及2—5层小波分解后只取 $A^{(1)}$ (即忽略 $A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}$), 为标记的方便, 在下文中我们称之为省略方法. 7种方法的特征值比较见表1, 2. 表中数值分别对应前5个最大特征值在各自特征向量中所占的比例. 序号1表示最大特征值在特征向量中所占的比例, 序号2表示次大特征值在特征向量中所占的比例, 其余依次类推. 特征值的总能量用 $\|\lambda\|$ 表示, 它是特征值向量的 l^2 范数, 即 $\|\lambda\| = (\sum_{i=1}^M \lambda_i^2)^{1/2}$. 正如表1, 2所示, 7种方法的前5个最大特征值在各自的能量中所占比例是相近的, 随着分解层数的增大, 省略方法的特征值能量比的精确度随之降低, 这主要是因为随着对矩阵简化的增大, 造成的矩阵误差也增大.

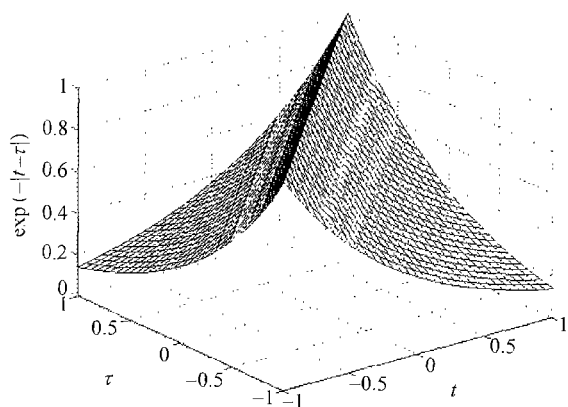


图1 $k=1$ 时核函数图

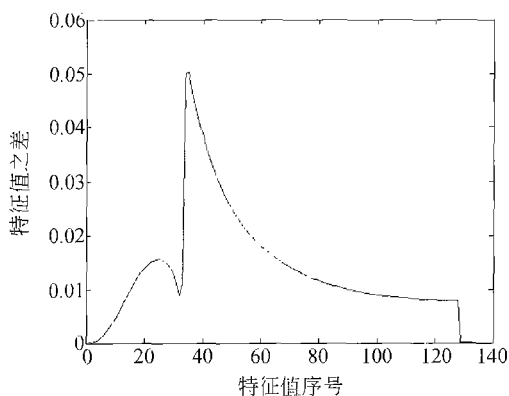


图2 两层小波分解与两层小波分解后只保留低频部分求得的特征值之差比较图

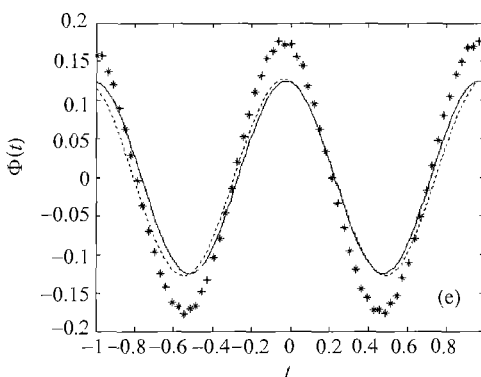
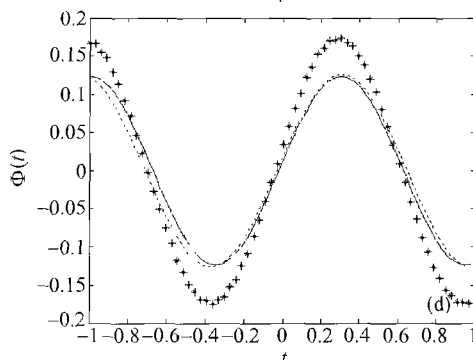
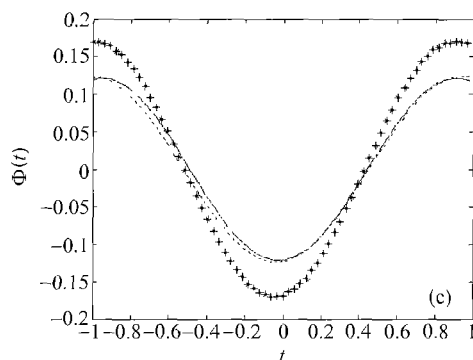
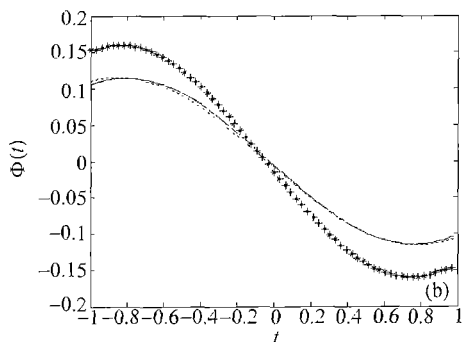
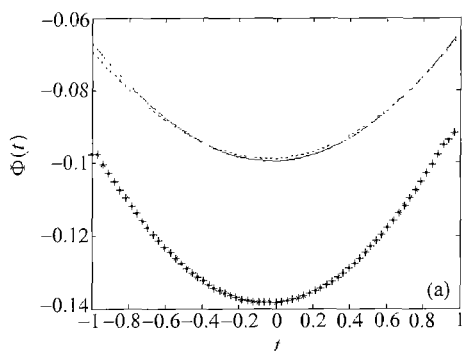


图3 3种情况下前5大特征函数图比较

(a) 对应最大特征值的特征函数图比较; (b) 对应次大特征值的特征函数图比较; (c) 对应第三大特征值的特征函数图比较; (d) 对应第四大特征值的特征函数图比较; (e) 对应第五大特征值的特征函数图比较

实线表示单层小波分解情况下的特征函数; 虚线表示两层小波分解情况下的特征函数; 星线表示两层小波分解取低频部分情况下的特征函数

针对单层小波分解, 2层小波分解以及2层小波分解后只取 $A^{(1)}$ (即忽略 $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$) 这3种情况, 计算核函数在 $k=1$ 时前5个最大特征值对应的特征函数, 其比较图见图3. 由图3的(a)~(e)图看出单尺度小波变换与多尺度小波变换得到的特征函数非常近似, 这主要是由于两种变换是相似

的. 多尺度小波变换与省略方法求得特征函数之间存在一定的误差, 误差的最大值出现在波峰和波谷, 计算得到, 前5大规范特征函数误差的最大值不超过0.06. 为了提高计算精度, 可采用自适应算法, 设置一个阈值, 小于该阈值的小波系数舍去, 保留大于阈值的小波系数. 实验是用 Matlab 6.1实现的.

4 结论

在信号处理, 图象分析中 Karhunen-Loeve 展开被用于特征提取, 在动力系统中, 被用于简化模型. 但其积分方程中特征函数的求解是十分困难的. 本文提出用小波变换来估计 Karhunen-Loeve 展开的基函数, 即先把核函数投影到小波空间, 把积分问题离散化, 使问题转化为矩阵特征值、特征向量求解问题. 该方法和用离散余弦变换求解比较, 其优点在于, 在核函数是局部 p 阶光滑的条件下, 可使特征分解问题进一步简化, 而精度没有大的损失. 数值实验结果表明, 利用本文提出的算法, 可大大的提高计算速度, 特征值特征函数估计可达到一定的精度要求.

附录

定理 若 Karhunen-Loeve 的核函数 $\Gamma_s(t, \tau)$ 存在导数 $\frac{\partial^{(2p)} \Gamma_s(t, \tau)}{\partial t^p \partial \tau^p}$, 用具有 p 阶消失矩的小波进行变换, 则矩阵 $C = \begin{bmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \\ A^{(3)} & A^{(4)} \end{bmatrix}$ 的特征值和矩阵 $\tilde{C} = \begin{bmatrix} A^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值的差满足

$$\left| \lambda_i(C) - \lambda_i(\tilde{C}) \right| \leq 2N\tilde{K}_1 2^{-(J-M)p} \sqrt{\frac{1-2^{M(-2p+1)}}{1-2^{-2p+1}}} + N\tilde{K}_2 2^{-2(J-M)p} \left(\frac{1-2^{M(-2p+1)}}{1-2^{-2p+1}} \right).$$

其中, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2 是与核函数有关的常数.

证明: 令 $E = \begin{bmatrix} 0 & A^{(2)} \\ A^{(3)} & A^{(4)} \end{bmatrix}$, 则 $C = \tilde{C} + E$, 记 C 的特征值为 $\lambda_i(C)$, \tilde{C} 的特征值为 $\lambda_i(\tilde{C})$, $A^{(1)}$ 的特征值为 $\hat{\lambda}_i(A^{(1)})$. 因为自相关函数 $\Gamma_s(t, \tau)$ 关于 t, τ 的位置等价, 即 $\Gamma_s(t, \tau) = E\{s(t)s(\tau)\} = E\{s(\tau)s(t)\} = \Gamma_s(\tau, t)$, 所以离散化自相关函数得到的矩阵是对称的, 对该对称阵的行列进行小波变换得到的矩阵也是对称的, 即矩阵 C 是对称的, 由此得到 $A^{(1)} =$

$A^{(1)T}, A^{(3)} = A^{(2)T}, A^{(4)} = A^{(3)T}, E = E^T$, 矩阵 C, \tilde{C}, E 都是规范阵, 由文献[6], 得到,

$$\left| \lambda_i(C) - \lambda_i(\tilde{C}) \right| = \left| \lambda_i(C) - \hat{\lambda}_i(A^{(1)}) \right| \leq \|E\|_2 \leq 2\|A^{(3)}\|_2 + \|A^{(4)}\|_2,$$

因为 $A^{(3)}$ 的元素 $\left| \Omega_{k,l,m}^{(3)} \right| = \left| \int_{-T}^T s_{J-M,k}(t) \phi_{l,m}(t) dt \right| \leq K_1 2^{-lp} \|S_{J-M,k}^{(p)}(t)\|$,

$A^{(4)}$ 的元素 $\left| \Omega_{j,k,l,m}^{(4)} \right| = \left| \int_{-T}^T \int_{-T}^T \Gamma_s(t, \tau) \phi_{j,k}(t) \phi_{l,m}(\tau) dt d\tau \right| \leq K_2 2^{-(j+l)p} \left\| \frac{\partial^{(2p)} \Gamma_s(t, \tau)}{\partial t^p \partial \tau^p} \right\|$, $j, l = J-1, \dots, J-M$,

记 $\tilde{K}_1 = \max K_1 \|s_{j-M,k}^{(p)}(t)\|$, $\tilde{K}_2 = \max K_2 \left\| \frac{\partial^{(2p)} \Gamma_s(t, \tau)}{\partial t^p \partial \tau^p} \right\|$,

$$\text{则 } \|A^{(3)}\| \leq N\tilde{K}_1 2^{-(J-M)p} \sqrt{\frac{1-2^{M(-2p+1)}}{1-2^{-2p+1}}},$$

$$\|A^{(4)}\| \leq N\tilde{K}_2 2^{-2(J-M)p} \left(\frac{1-2^{M(-2p+1)}}{1-2^{-2p+1}} \right),$$

所以,

$$\left| \lambda_i(C) - \lambda_i(\tilde{C}) \right| \leq 2N\tilde{K}_1 2^{-(J-M)p} \sqrt{\frac{1-2^{M(-2p+1)}}{1-2^{-2p+1}}} + N\tilde{K}_2 2^{-2(J-M)p} \left(\frac{1-2^{M(-2p+1)}}{1-2^{-2p+1}} \right).$$

即特征值的误差界与核函数的光滑阶, 以及小波函数的消失矩有关.

参 考 文 献

- 1 Courmontagne P. A new formulation for the Karhunen-Loeve expansion. Signal Processing, 1999, 79(3): 235
- 2 Tarnan I H. et al. Extensions to Karhunen-Loeve based approximation of complicated phenomena. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1998, 155: 359
- 3 Castrillón - Candás J E. et al. Fast estimation of continuous Karhunen-Loeve eigenfunctions using wavelets. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(1): 78
- 4 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 11(7): 674
- 5 Strang G. et al. Wavelets and Filter Banks. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge, 1996
- 6 Horn R A, et al. Matrix Analysis. Cambridge, MA: Cambridge Univ Press, 1996